Algebra2

siriehn_nx
Tsinghua University
siriehn_nx@outlook.com
February 26, 2024

6 特征值与特征向量(Eigenvalues & eigenvector)

6.1 特征值与特征向量:定义与性质

Definition 6.1.1 设 ϕ 是 V 上的一个线性变换,如果存在 $\lambda \in \mathbb{F}$ 以及一个非零向量 $\xi \in V$ 使得 $\phi(\xi) = \lambda\xi$,那么称 λ 是 ϕ 的一个特征值,并且称 ξ 是 ϕ 中属于 λ 的特征向量.

Example 6.1.2

1. $V = C^\infty(\mathbb{R})$ 实数集上无限次可微实函数构成的向量空间,考虑映射 $V \to V, f(x) \mapsto f'(x)$,它是 V 上的一个线性变换,对于任意 $\lambda \in \mathbb{F}$, 都有 $\delta\left(e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}\right)$ 因此,每个实数都是 δ 的一个特征值.
2. $V = \mathbb{F}[x]$,于是映射 $\phi : V \to V, f(x) \mapsto xf(x)$ 是 V 上的一个线性变换,设 λ 是 ϕ 的一个特征值,即存在一个非零多项式 $g(x)$ 使得 $\phi(g(x)) = \lambda g(x)$,此时不存在 $g(x)$,于是 ϕ 中没有特征值.
3. V 是 $\mathbb{R}$ 上二维向量空间,且 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ 是 V 的一个基,考虑 V 上的线性变换 ϕ,满足
$$\phi(\varepsilon_1) = \varepsilon_2, \phi(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 \tag{6.1.1}$$
易见, $\varphi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \Longrightarrow 1$ 是 ϕ 的特征值,且 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ 是 ϕ 的属于 1 的特征向量,同理 $\phi(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$.
4. 定义 V 上的线性变换 $\psi : \psi(\varepsilon_1) = \varepsilon_2, \psi(\varepsilon_2) = -\varepsilon_1$,假设 $\lambda \in \mathbb{R}$ 是 ψ 的一个特征值,且 $0 \neq \eta = a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2$ 是 ψ 的属于 λ 的特征向量,即 $\psi(\eta) = \lambda a\varepsilon_1 + \lambda b\varepsilon_2$,那么得到 $\lambda^2 = -1$,因此 ψ 没有特征值.

Problem

如何求一个线性变换的特征值与特征向量?

下面总假定 V 是有限维向量空间.

设 $\phi \in \mathcal{L}(V), \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ 是 V 的一个基,且设 ϕ 的在这个基下表示矩阵为 $A = \left(a_{ij}\right) \in M_{n(\mathbb{F})}$ 即 $(\varphi(\alpha_1), ..., \varphi(\alpha_n)) = (\alpha_1, ..., \alpha_n)A$.

设 $\lambda \in \mathbb{F}$ 且 $0 \neq \xi = \sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i \in V$,记 $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ 则 $\phi(\xi)$ 在 $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ 下的坐标向量是 $A\alpha$ 并且 $\lambda\xi$ 在 $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ 下的坐标向量是 $\lambda\alpha$,因此 $\varphi(\xi) = \lambda\xi \Leftrightarrow A\alpha = \lambda\alpha \Leftrightarrow (\lambda I_n - A)\alpha = 0$.

综上得到:

1. $\lambda \in \mathbb{F}$ 是 ϕ 中的特征值 $\Longleftrightarrow \det(\lambda I_n - A) = 0$.

2. $0 \neq \xi \in V$ 是 ϕ 中的特征值 λ 的特征向量 $\Longleftrightarrow$ 他的坐标向量是个齐次线性方程组 $(\lambda I_n - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$ 的一个解.

Definition 6.1.3 设 $A \in M_{n(\mathbb{F})}$ 如果 $\lambda \in \mathbb{F}$ 与 $0 \neq \eta \in \mathbb{F}^n$ 满足 $A\eta = \lambda\eta$ 那么称 λ 是 A 的一个特征值,且称 η 是 A 的属于 λ 的特征向量.

Definition 6.1.4 设 $A = \left(a_{ij} \in M_{n(\mathbb{F})}\right)$ 称行列式

$$\det(xI_n - A) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & x - a(nn) \end{vmatrix} \tag{6.1.2}$$

是 A 的特征多项式 (characteristic polynomial), 记作 $C_A(x)$ 或 $C(x)$.

特征多项式的基本性质:

1. $C_A(x)$ 是一个 n 次首一多项式.
2. $\lambda \in \mathbb{F}$ 是 A 的特征值 $\Longleftrightarrow$ λ 是 $C_A(x)$ 的根,特别地,A 的特征值的个数不超过 n.
3. 记 $C_A(x) = x^n - a_1 x^{n-1} + \dots + (-1)^i x^{n-i} + \dots + (-1)^n a_n$,于是 a_i 等于 A 所有 i 阶主子式的和 $= \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_i \leq n} \begin{vmatrix} a_{k_1 k_1} & \cdots & a_{k_1 k_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k_n k_1} & \cdots & a_{k_n k_n} \end{vmatrix}$
4. 设 $A, B \in M_{n(\mathbb{F})}$ 是相似的,即存在一个可逆矩阵 $P \in M_{n(\mathbb{F})}$,使得 $B = P^{-1}BP$,于是 $C_B(x) = |xI_n - B| = |\ xI_n - P^{-1}AP| = |P^{-1}(xI_n - A)P| = |xI_n - A| = C_A(x)$

Definition 6.1.5 设 V 是一个有限维向量空间,且 $\phi \in \mathcal{V}$,称 ϕ 的任意给定基下的矩阵 A 的特征多项式 $C_A(x)$ 为 ϕ 特征多项式,亦记作 $C_\phi(x)$.

$\mathcal{L}(V) \ni \phi$, λ 是 ϕ 的一个特征向量,设 $\xi, \eta \in V$ 都是 φ 的属于 λ 的特征向量,则对于 $\forall a, b \in \mathbb{F}$,有 $\phi(a\xi + b\eta) = a\phi(\xi) + b\phi(\eta)$,于是

$$\begin{aligned} V_\lambda &= \{\alpha \in V \mid \phi(\alpha) = \lambda\alpha\} \\ &= \{\phi \text{ 中的属于特征至 } \lambda \text{ 的特征向量}\} \cup \{0\} \\ &= \operatorname{Ker}(\lambda \operatorname{id}_v - \phi) \end{aligned} \tag{6.1.3}$$

是 V 的子空间,且是 ϕ 的不变子空间.

Example 6.1.6

1. $A = \begin{pmatrix} A_1 & * & \dots & * \\ 0 & A_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_s \end{pmatrix}$ 是分块上三角阵, $A_i \in M_{n_i}(\mathbb{F}), i = 1, 2, \dots, s$.

   于是 $C_A(x) = \prod_{i=1}^{s} C_{A_i}(x)$.

2. 求 $A=\begin{pmatrix}3&1&-1\\2&2&-1\\2&2&0\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

$$C_{A(x)}=\det(xI_3-A)=\begin{vmatrix}x-3&-1&1\\-2&x-2&1\\-2&-2&x\end{vmatrix}=(x-1)(x-2)^2\Longrightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=2$$

后面解方程组得到 λ_1 的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, λ_2 的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

3. $n\geq 0, V=F[x]_n=\{f(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n\mid a_0,a_1,...,a_n\in\mathbb{F}\}$

定义 $\sigma: V\to V, f(x)\mapsto f'(x)(\sigma\in\mathcal{L}(V))$,于是 σ 在基 $\left\{\dfrac{x^i}{i!}\right\}$ 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&...&0\\0&0&1&...&0\\\vdots&\ddots&&&\vdots\\0&0&0&...&1\\0&0&0&...&0\end{pmatrix}\Longrightarrow C_\varphi(x)=C_A(x)=x^{n+1}=0,\text{则 }0\text{ 是 }\varphi\text{ 唯一的特征值,且 }V_0=\mathbb{F}.$$

Lemma 6.1.7 *(Schur's Lemma)* 设 $A=(a_{ij})\in M_{n(\mathbb{F})}$ 且 $C_A(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)...(x-\lambda_n)$,其中 $\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{F}$,则存在 n 阶可逆矩阵 $P\in M_{n(\mathbb{F})}$ 使得 $P^{-1}AP=A=\begin{pmatrix}\lambda_1&*&...&*\\0&\lambda_2&...&*\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&...&\lambda_n\end{pmatrix}$.

Proof

对于 n 使用数学归纳法

$n=1$ 时,✓.

设 $n\geq 2$,且假设定理对于 $n-1$ 成立.

设 $A=(a_{ij})\in M_{n(\mathbb{F})}$ 且 $C_A(x)=\prod_{i=1}^n(x-\lambda_i)$ 取 $\alpha_1\in\mathbb{F}^n$ 是属于 λ_1 的特征向量,则 $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$,将 α_1 扩展成 $\mathbb{F}^n$ 的一个基,$\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$,记 $P_1=(\alpha_1,...,\alpha_n)$,则 P_1 可逆,并且 $AP_1=A(\alpha_1,...,\alpha_n)=(\alpha_1,...,\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&*&...&*\\0&b_{1,1}&...&b_{1,n-1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&b_{n-1,1}&...&b_{n-1,n-1}\end{pmatrix}=P_1\begin{pmatrix}\lambda_1&*\\0&B\end{pmatrix}$ 其中 $B=b_{ij}\in M_{n-1}(\mathbb{F})$ 即 $P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix}\lambda_1&*\\0&B\end{pmatrix}$.

$\prod_{i=1}^n(x-\lambda_i)=C_A(x)=C_{P^{-1}AP}(x)=(x-\lambda_1)C_B(x)$ 根据归纳假设,存在可逆矩阵 Q,

$$Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix}\lambda_2&*&...&*\\0&\lambda_3&...&*\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&...&\lambda_n\end{pmatrix}$$

令 $P = P_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q\end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F}) \Longrightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ 0 & B_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & * & \dots & *\\ 0 & \lambda_2 & \dots & *\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}$,□

Corollary 6.1.8 设 $\dim_{\mathbb{F}} V = n, \phi \in \mathcal{L}(V)$ 且 $C_\phi(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)(\lambda_i \in \mathbb{F})$,则存在一个基 $\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\}$ 使得 ϕ 在这个基下表示矩阵为:

$$P = \begin{pmatrix}\lambda_1 & * & \dots & *\\ 0 & \lambda_2 & \dots & *\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix} \tag{6.1.4}$$

Example 6.1.9 $A = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), C_A(x) = x^2+1$,则不存在可逆矩阵 $P \in M_2(\mathbb{R})$ 使得其相似于上三角矩阵.

Corollary 6.1.10

1. 任意一个 n 阶复矩阵都相似于上三角阵.
2. ϕ 是 n 维复向量空间 V 上的一个基使得 ϕ 在这个基下的矩阵是上三角矩阵.

设 $A \in M_{n(\mathbb{F})}$ 且 α 是 A 的属于 λ 的特征值,即 $A\alpha = \lambda\alpha$,即对于任意 $k \geq 1, A^k\alpha = \lambda^k\alpha$,即 λ^k 是 A^k 的特征值.

更一般地,设 $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \in \mathbb{F}[x]$,则 α 是 $p(A)$ 的属于特征值 $p(\lambda)$ 的特征向量.

Proposition 6.1.11 设 $A \in M_n(\mathbb{F})$ 且 $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ 满足 $p(A) = 0$,若 λ 是 A 的特征值,则 $p(\lambda) = 0$.

Proposition 6.1.12 设 $A = (a_{ij}) \in M_{n(\mathbb{F})}$ 且 $\lambda_1, ..., \lambda_n$ 是 A 的所有特征值,即 $C_A(x) = \prod_{i=1}^{n(x-\lambda_i)}$

1. 对于任意 $f(x) \in \mathbb{F}[x], f(\lambda_1), ..., f(\lambda_n)$ 是 $f(A)$ 所有特征值.
2. 若 A 可逆,则 $\lambda_1^{-1}, ..., \lambda_n^{-1}$ 是 A^{-1} 的所有特征值.

Proof

由 Schur's Lemma 知,存在可逆矩阵

$$P \in M_n(\mathbb{F}), \text{s.t. } P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\lambda_1 & * & \dots & *\\ 0 & \lambda_2 & \dots & *\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \forall k \geq 1, P^{-1}A^kP = \begin{pmatrix}\lambda_1^k & * & \dots & *\\ 0 & \lambda_2^k & \dots & *\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow P^{-1}f(A)P = f(P^{-1}AP)$$

6.2 对角化

Immer mit den einstellungen Beispielen anfangen.

— David Hilbert

Definition 6.2.1 *(对角化)*

设 $\dim_{\mathbb{F}} V = n, \varphi \in \mathcal{L}(V)$

1. 设 ϕ 是 $\mathbb{F}$ 上的有限维向量空间,如果存在 V 的一个基使得 ϕ 在这个基下表示矩阵是对角阵,则称 ϕ 是可对角化的.
2. 称一个 n 阶矩阵 $A \in M_{n(\mathbb{F})}$ 是可对角化的,若存在可逆矩阵 $P \in M_{n(\mathbb{F})}$ 使得 $P^{-1}AP$ 是一个对角阵.

根据定义, $\phi \in \mathcal{L}(V)$ 可对角化当且仅当 ϕ 在 V 的任意一个基下的矩阵是可对角化的.

Proposition 6.2.2

1. 设 $\dim V = n, \varphi \in \mathcal{L}(V)$,则 ϕ 是可对角化的当且仅当 ϕ 有 n 个无关的特征向量 ($\Longleftrightarrow V$ 有一个由 ϕ 的特征向量构造的基).
2. 设 $A \in M_{n(\mathbb{F})}$ 则 A 可对角化当且仅当 A 有 n 个无关的特征向量.

Proof

1. $$(\phi(\alpha_1), ..., \phi(\alpha_n)) = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \varphi(\alpha_i) = \lambda_1 \alpha_i, i = 1, ..., n$$
2. 设 A 可对角化,存在可逆矩阵 P 使得
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix} \Longrightarrow AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$$ 记 $P = \alpha_1, ..., \alpha_n$ 于是 $\alpha_1, ..., \alpha_n$ 线性无关,并且 $A\alpha_i = \lambda_i \alpha_i$,则找到了 n 个线性无关的特征列向量.

   反过来的证明是类似的.

Example 6.2.3

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, A 有唯一的特征值 $\lambda = 0$, 并且 A 的属于 $\lambda = 0$ 的特征向量为 $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} (0 \neq a \in \mathbb{F})$, 于是这个矩阵不可对角化.
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C_A(x) = x^2 + 1$,将 A 看作 $\mathbb{R}$ 上的矩阵,它不可对角化.将 A 看作 $\mathbb{C}$ 上的矩阵,则有两个特征值 i 与 $-i$,并且 $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$ 是 A 分别属于 i 和 -1 的特征值.令 $P = \begin{pmatrix} i & i \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

Theorem 6.2.4 设 $\dim V = n, \varphi \in \mathcal{L}(V), \lambda_1, ..., \lambda_t \in \mathbb{F}$ 的互补相同的特征值,若 $\xi_1, ..\xi_t$ 分别是属于 ϕ 属于特征值 $\lambda_1, ..., \lambda_n$ 的特征向量,则 $\xi_1, ..., \xi_t$ 线性无关.

证明是简单,不再赘述.

Corollary 6.2.5

1. 设 $\dim V = n$ 且 $\phi \in \mathcal{L}V$, 若 ϕ 中有 n 个互补相同的特征值,则 ϕ 可对角化.
2. λ 是 ϕ 的特征向量 $\longrightarrow V_\lambda = \mathrm{Ker}(\lambda I_n - A])$
3. 设 $V = n, \phi \in \mathcal{L}(V), \lambda_1, \dots \lambda_t$,是互不相同的特征值,则 $V_{\lambda_1} + \dots + \dim V_{\lambda_t} = V_{\lambda_1} \times V_{\lambda_0} \times \dots \times V_{\lambda_t}$,特别的 $\sum \dim_{\lambda_i} \leq \dim V$

Theorem 6.2.6 设 $\dim_{\mathbb{F}} V = n, \phi \in \mathcal{L}(V)$, 且 $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in \mathbb{F}$ 是 ϕ 中所有互不相同的特征值,则 ϕ 可对角化,当且仅当 $V = V_{\lambda_1} \times \dots \times V_{\lambda_t}$

Proof

"$\Longrightarrow$" 设 ϕ 可对角化,取 $\xi_1, \dots, \xi_n$ 是 ϕ 的线性无关的特征向量.

- $\xi_1, \dots, \xi_{s_1} \in V_{\lambda_1}$
- $\xi_{s_1+1}, \dots, \xi_{s_2} \in V_{\lambda_2})$
- $\dots$
- $\xi_{\sum_{i=1}^{t-1} s_i + 1}, \dots, \xi_t \in V_{\lambda_t}$

其中 $s_1 + \dots + s_t = n$,而由于 $s_i \leq \dim V_{\lambda_i}$

于是 $n = \sum_{\{i=1\}}^{t} s_i \leq \sum_{i=1}^{t} V \dim V_{\lambda_i} = n$

"$\Leftarrow$",取 V 的基 $\left\{\xi_{i_1}, .., \xi\left(i_{s_i}\right)\right\}$, 其中 $s_i = \dim V_{\lambda_i}$,则 $\xi_{11}, \dots, \xi_{1 s_i}, \xi_{21}, \dots, \xi(t, s_t)$ 是 V 的一个基, 于是 ϕ 可对角化.

Definition 6.2.7 设 $\dim_V = n, \varphi \in \mathcal{L}(V)$ 是 ϕ 中的特征值,称 $\dim V_{\lambda(\lambda)}$ 是 λ 的几何重数 (geometroc),称 λ 作为 $C_\varphi(X)$ 的根的重数为代数重数(deynamic mathiplicity).

Example 6.2.8 $V = \mathbb{F}[x]_n, \delta V - \to V, f(x) \mapsto f'(x)$,这表明几何重数为 1,代数重数 有$n + 1$ 个.

Lemma 6.2.9 设 $V = n, \phi(\lambda)$ 且 λ 是其中 ϕ 的一个特征值,则

$$\lambda \text{ 几何重数} \leq \lambda \text{ 代数重数} \tag{6.2.5}$$

Proof

记 $s = \dim V_\lambda$ 取 V_λ 的一组基 $\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$ 将其扩充为 V 的一个基 $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$,于是有 $(\phi(\xi_1), \dots, \phi(\xi_s), \dots, \phi(\xi_n)) = (\xi_1, \dots, \xi_s, \dots, \xi_n)\begin{pmatrix} \lambda I_s & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \Longrightarrow C_\phi(x) = (x - \lambda)^s C_B(x)$.

Theorem 6.2.10 设 $\dim_{\mathbb{F}} V = n$ 且 $\phi \in \mathcal{L}(V)$ 则 ϕ 可对角化当且仅当下面两个条件满足:

1. $C_\phi(x) = \prod_{i=1}^{t} (x - \lambda_i)^{s_i}$,其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ 互不相同, $s_1, \dots, s_t \geq 1$.
2. 对于 $1 \leq i \leq t$,有 $s_i = \dim \mathrm{Ker}(\lambda_i \,\mathrm{id}_V - \phi)$.

Proof

"$\Longrightarrow$" 设 ϕ 可对角化,则 $V = V_{\lambda_1} \times \dots \times V_{\lambda_t}$,其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ 是所有互不相同的特征值.

对于 $1 \leq i = t$ 取 V_{λ_i} 的一个基 $\left\{\xi_{i_1}, .., \xi_{i_{s_i}}\right\}$ 其中 $s_i = \dim V_{\lambda_i}$.

于是 ϕ 在 V 的基 $\left\{\xi_{i_1}, ..., \xi_{i_{s_i}} \middle| 1 \leq i \leq t\right\}$ 下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{s_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{s_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n I_{s_n} \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow C_\phi(x) = C_A(x) = \prod_{i=1}^{t} (x - \lambda_i)^{s_i}$ 并且 λ_i 的代数重数 $= s_i = \dim V_{(\lambda)_i}$

"$\Longleftarrow$" $n = \sum_{\{i=1\}}^{t} s_i = \dim V_{\lambda_1} + \dots + \dim V_{\lambda_t} \Longrightarrow V = V_{\lambda_1} \times \dots \times V_{\lambda_t}$

Problem

设 $A \in M_{n(\mathbb{F})}$ 判断 A 是否可对角化的步骤

1. 计算 $C_A(x) = \det(xI_n - A)$
2. 求 $C_A(x)$ 的所有复根,若存在一个不在 $\mathbb{F}$ 的根,则不可对角化.
3. 设 $C_A(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 中有 n 个根,若存在一个 A 的特征值 $\lambda \in \mathbb{F}$,使得 λ 的几何重数 $< \lambda$ 的代数重数则 A 不可对角化.
3. 设 $C_A(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 中有 n 个根,若存在一个 A 的特征值 $\lambda \in \mathbb{F}$,使得 λ 的几何重数 $< \lambda$ 的代数重数则 A 不可对角化.

34 设 $C_A(x)$ 在 $\mathbb{F}$ 中有 n 个根,若对于所有 A 的特征值 $\lambda \in \mathbb{F}$,使得 λ 的几何重数 $= \lambda$ 的代数重数则 A 可对角化.

设 $\lambda_1, ..., \lambda_t$ 是 A 的所有互不相同的特征值,取 V_{λ_i} 的一个基 $\left\{\xi_{i_1}, .., \xi_{i_{s_i}}\right\}$,并且记
$P = \left(\xi_{1_1}, ..., \xi_{1_{s_1}}, ..., \xi_{t_1}, ..., \xi_{t_{s_t}}\right) \in M_{n(\mathbb{F})}$

则有 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{s_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{s_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n I_{s_n} \end{pmatrix}$.