Analysis2

siriehn_nx
Tsinghua University
siriehn_nx@outlook.com
February 26, 2024

7 多变量函数的连续性

7.1 $\mathbb{R}$ 中的拓扑

Definition 7.1.1 $\mathbb{R}^n = \left\{x = (x^1, ...x^n) \,\middle|\, x^i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., n\right\}$, 称 x 为 n 元有序数组,为 $\mathbb{R}^n$ 中的点,通常的加法和数乘,$\mathbb{R}^n$ 为线性空间.

7.1.1 度量

Definition 7.1.1.2 映射 $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}(x, y) \mapsto d(x, y)$,其中 $d(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$.

则 d 满足:

1. 正定性,$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, d(x, y) \geq 0, " = " \iff x = y$.
2. 对称性, $d(x, y) = d(y, x)$.
3. 三角不等式, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

若 d 满足三条性质,称 d 为 $\mathbb{R}^n$ 的度量.

Remark

Definition 7.1.1.3

$$p \geq 1, d_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+, (x, y) \mapsto d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x^i - y^i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+, (x, y) \mapsto d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x^i - y^i|$$

可以验证,d_p, d_∞ 均为 $\mathbb{R}^n$ 上的度量.

Proposition 7.1.1.4 *(Minkowski 不等式)* $d_\infty(x, y) \leq d(x, y) \leq n d_\infty(x, y)$
$C_{p,1} d(x, y) \leq d_p(x, y) \leq C_{p,2} d(x, y)$,其中 $C_{p,1}, C_{p,2}$ 均为依赖 p 的常数.

7.1.2 开集,闭集,拓扑空间

Definition 7.1.2.5 设 $a \in \mathbb{R}^n, \delta > 0, B(a; \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a, x) < \delta\}$ 称为以 a 为中心,δ 为半径的球 / δ 邻域.

Definition 7.1.2.6 设 $U \subset \mathbb{R}^n, \forall a \in U, \exists \delta > 0, \text{s,t. } B(a; \delta) \subset U$,则称 U 为开集.

Example 7.1.2.7 $B(a; r)$ 为开集(r > 0).

Proposition 7.1.2.8

1. $\mathbb{R}^n, \emptyset$ 为开集.
2. 无穷多个开集的并还是开集.

3. 有限多个开集的交还是开集.

Definition 7.1.2.9 $\mathbb{R}^n$ 中的开集满足以上三条性质,那么称 $\mathbb{R}^n$ 为拓扑空间.

$\mathbb{R}^n$ 中的拓扑空间是由 d 诱导的.

一般而言,有以下定义.

Definition 7.1.2.10 *(拓扑空间)* 设 X 为集合, τ 为 X 的子集簇,满足:

1. $\varphi, X \in \tau$
2. $\forall \tau_\alpha, \alpha \in \Lambda, \bigcup\limits_{\{\alpha\in\Lambda\}} \tau_\alpha \in \tau$
3. 设 $\tau_1, ..., \tau_m \in \tau$ 则 $\bigcap\limits_{\{i=1\}}^{m} \tau_i \in \tau$

那么称 (X, τ) 为拓扑空间.

Definition 7.1.2.11 设 $A \subset \mathbb{R}^n$,若 $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$ 为开集,那么称 A 为闭集.

Example 7.1.2.12

- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, A = \{x, y\}$ 闭集
- $\overline{B}(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a; x) \le r\}$ 闭集
- $\mathcal{S}^{n-1}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a; x) = r\}$ 为闭集

记 $\mathcal{S}^{n-1} = \mathcal{S}^{n-1}(0, 1)$

由 De Morgan 定理可知:

Proposition 7.1.2.13

1. $\mathbb{R}^n, \emptyset$ 是闭集
2. 无穷多个闭集的交仍然是闭集
3. 有限多个闭集的并仍然是闭集

7.1.3 邻域,内点,边界点,聚点

Definition 7.1.3.14 *(邻域,内点,边界点)*

1. 设 $x \in \mathbb{R}^n$,任一包含 x 的开集 U 称为 x 的邻域,$\mathring{U} = U \setminus \{x\}$ 称为 x 的去心邻域
2. 设 $D \subset \mathbb{R}^n$,若 $x \in D, \exists x$ 的邻域 U, s.t. $U \subset D$, 称 x 为 D 的内点.对应的,若 x 是 D^c 的内点,则 x 为 D 的内点.
3. 设 $D \subset \mathbb{R}^n$, x 即非内点也非外点,则 x 为 D 的边界点. $\partial D = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x为D \text{ 的边界点}\right\}$,称 ∂D 为 D 的边界,也可定义为 $\partial D = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x \text{ 的任一领域 } U, U \cap D \ne \emptyset, U \cap D^c \ne \emptyset\right\}$

Definition 7.1.3.15 *(聚点)* 设 $D \subset \mathbb{R}^n$,若 D 的任一邻域均含有 D 中的无穷多个点, 称 x 为 D 的一个聚点. $\Longleftrightarrow x$ 的任意邻域 $U, \mathring{U} \cup D \ne \emptyset$

$D' = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x为D \text{ 聚点}\right\}$,称其为 D 的导集

称 $\overline{D} = D \cup D'$ 为 D 的闭包.

Theorem 7.1.3.16 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为闭集 $\Longleftrightarrow D' \subset D$.

Proof

"$\Longrightarrow$" $\forall a \in D'$ 要证明 $a \in D$.

(反证法): 若 $a \notin D$ 则 $a \in D^c$, 由于 D 闭集,则 D^c 开集,$\exists \delta > 0, B(a;\delta) \subset D^c, B(a;\delta) \cap D = \emptyset$,这与 a 为聚点矛盾,则 $a \in D$, i.e. $D' \subset D$.

"$\Longleftarrow$" $D' \subset D$ 要证明 D^c 为开集.

$\forall a \in D^c, a$ 不是聚点,则 $\exists \delta > 0$, s.t. $B(a;\delta) \cap D = \emptyset$,则 $B(a;\delta) \subset D^c$,从而 D^c 为开集. □

7.2 $\mathbb{R}^n$ 中的紧(致)集

Definition 7.2.1 *(紧集)* 设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 若 A 的任意开覆盖都有有限字符该,称 A 为 $\mathbb{R}^n$ 的紧集(compet set).

由 Heine-Bored 定理可知 $\mathbb{R}$ 中闭区间为紧集.

Definition 7.2.2 *(长方体)* 设
$a, b \in \mathbb{R}^n, a = (a^1, ..., a^n), b = (b^1, ..., b^n), a^i \le b^i, i = 1, ..., n, I_{a,b} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, a^i \le x^i \le b^i\right\}$ 其为长方体.

Proposition 7.2.3 $I_{a,b}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集.

Proof

(反证法): 设 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 为 $I_{a,b}$ 的开覆盖,不存在其的有限子覆盖,令 I_1 分成 2^n 个长方体,则至少有一个长方体没有有限子覆盖,记为 I_2,继续其过程,记为 $I_3, ..., I_n, ...$,满足 $I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_k \supset ....$

$I_k = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, a_k^i \le x^i \le b_k^i, i = 1, ..., n\right\}$

由 Cauchy-Cantor 闭区间套定理

$\exists! x_0^i \in \bigcap_{\{k=1\}}^{\infty} [a_k^i, b_k^i]$,令 $x_0 = (x_0^1, ... x_0^n)$,则 $\exists \alpha_0 \in \Lambda$, s.t. $x_0 \in U_{\alpha_0}$,令 $\operatorname{diam} I_k = \sup_{\{x, y \in I_k\}} d(x, y)$

则 $\lim_{k \to \infty} \operatorname{diam} I_k = 0, \exists k \in \mathbb{N}^*$, s.t. $k \ge K, x_0 \in I_k \subset U_{\alpha_0}$,从而与构造矛盾! □

Theorem 7.2.4 设 $A \subset \mathbb{R}^n$

1. A 是紧集,则一定为闭集.
2. A 是紧集,则 $D \subset A$ 是闭集,则 D 为紧集.

Proof

1. 只 需 证 明 A 是 开 集 即 可 ,则 $\forall x_0 \in A^c$,对 于 $x \in A, \delta(x) = \frac{1}{2} d(x, x_0)$,则 $A \subset \bigcup_{x \in A} B(x; \delta(x))$,由于 A 紧,则 $\exists, B(x_1; \delta(x_1)), ..., B(x_m; \delta(x_m))$, s.t. $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i; \delta(x_i))$, 定义 $V = \bigcap_{i=1}^{m} B(x_0; \delta(x_i))$,则 $V \cap A = \emptyset, V \subset A^c$,从而 A 是闭集.

□

Definition 7.2.5 *(有界集)* 设 $A \subset \mathbb{R}^n$,若 $\exists I_{a,b}$, s.t. $A \subset I_{a,b}$,则称 A 为有界集.

Theorem 7.2.6 设 $A \subset \mathbb{R}^n$,则 A 为紧集 $\iff$ A 是有界闭集.

Proof

"$\Longrightarrow$", ✓.

"$\Longleftarrow$", A 有界,$\exists I_{a,b}$, s.t. $A \subset I_{a,b}$, 则 A 为闭集. □

7.3 $\mathbb{R}^n$ 中的点列

Definition 7.3.1 *(点列)* 设 $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+$, s.t. $k > N$, 有 $x_k \in B(a; \varepsilon)$,称 $\{x_k\}$ 收敛于 a,记为 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$.

即若 $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \in A' \iff \exists \{x_k\} \setminus \{a\} \subset A$, s.t. $\lim\limits_{\{k\to\infty\}} x_k = a$

Remark

$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a \iff \lim\limits_{\{k\to\infty\}} x_k^i = a^i$

Definition 7.3.2 *(列紧集)* 设 $A \subset \mathbb{R}^n$, 若 A 中任何点列都收敛于 A 中的点.

Theorem 7.3.3 A 为紧集 $\iff$ A 为列紧集.

Proof

"$\Longrightarrow$", 设 $\{x_k\}$ 是 A 的点列,由 A 是 紧集,则有界,则 $\{x_k^i\}, i = 1, \ldots n\left(|x_k^i| \le d(x_k, 0)\right)$, 由 Bolzno-Weierstrass 定理,则 $\{x_k^i\}$ 存在收敛子列 $x_{k_n}^i$ 设 $\lim\limits_{k_n\to\infty} x_{k_n}^i = x_0^i$,在这个收敛子列里面找接下来的 x_1 如此反复,令 $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$,故 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k_n} = x_0 \in A' \subset A$, 则 A 是列紧集.

"$\Longleftarrow$", 只需证明 A 是有界闭集即可.

1. A 有界(反证法),若 A 无界,则 $\forall R \in \mathbb{N}, \exists x_k \in A, d(0, x_k) > k, \{x_k\} \subset A$, A 为列紧集. $\{x_k\}$ 有收敛子列 $\left\{x_{k_n}\right\}$ 且 $\lim\limits_{k_n\to\infty} x_{k_n} = b \in A$,有 $k < d\left(0, x_{k_n}\right) \le d(0, b) + d\left(b, x_{k_n}\right)$,矛盾,则 A 有界.
2. A 为闭集,只需证明 $A' \subset A$,设 $a \in A'$,存在一个子列是 A 的子列,他们极限是 a, 则 A 是闭集.

□

Definition 7.3.4 设 $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+$, s.t. $k, l > N$ 有 $d(x_k, x_l) < \varepsilon$,则称 $\{x_k\}$ 为 Cauchy 列.

Theorem 7.3.5 设 $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{x_k\}$ 为 Cauchy 列 $\iff$ $\{x_k\}$ 是收敛点列.

此时称 $\mathbb{R}^n$ 是完备度量空间.

7.4 $\mathbb{R}^n$ 中的连通集

Definition 7.4.1 *(连通集)* 设 $D \subset \mathbb{R}^n$,若 $\exists A, B \ne \emptyset, D = A \cup B$,则有 $\overline{A} \cap B \ne \emptyset$ 或 $A \cap \overline{B} \ne \emptyset$,则 D 为连通集.

Theorem 7.4.2 设 $D \subset \mathbb{R}$, D 为连通集 $\iff$ D 为 $\mathbb{R}$ 的区间.

Proof

"$\Longrightarrow$", 设 $[a,b]\subset D$,若 $\exists c\in[a,b]$, s.t. $c\notin D$,令 $A=D\cap(-\infty,C), B=D\cap(C,+\infty)$,此时与 D 为连通集矛盾,则 D 是区间.

"$\Longleftarrow$" 设 $D=A\cup B, A,B\neq\emptyset$,要证 $\overline{A}\cap B\neq\emptyset$ 或 $A\cap\overline{B}\neq\emptyset$,设 $a\in A, b\in B$,且 $a<b$, 令

$$V(x)=\{x\in A, \mid a\le x<b\}, c=\sup V \tag{7.4.1}$$

1. 若 $c\in A, A\cap B=\emptyset, c<b, (c,b)\subset B$ 有 $A\cap\overline{B}\neq\emptyset$.
2. 若 $c\notin A, D=A\cup B, c\in B$, 有 $\overline{A}\cap B\neq\emptyset$.

□

Definition 7.4.3 *(道路连通)* 设 $D\subset\mathbb{R}^n$, 若 $\forall p,q\in D$, $\exists$ 一条道路 $\gamma:[0,1]\to D, t\mapsto\gamma(t)$,其中 $\gamma(t)=(\gamma^1(t),...,\gamma^n(t)), \gamma^i(t)$ 为连续函数,$i=1,...,n, \gamma(0)=p, \gamma(1)=q$,则 D 为道路连通集合.

Definition 7.4.4 *(凸集)* 设 $A\subset\mathbb{R}^n$, 若 A 中任何两点连接的线段在 A 中,则 A 为凸集.

Example 7.4.5

1. $B(a;\delta)$ 是道路连通的,凸的.
2. $\mathcal{S}^{n-1}(a,\delta)$ 是道路连通的.

Theorem 7.4.6 若 D 为道路连通集,则 D 为连通集.

Proof

设 $D=A\cup B, A,B\neq\emptyset, A\cap B=\emptyset$,要证 $\overline{A}\cap B\neq\emptyset$ 或 $A\cap\overline{B}\neq\emptyset$.

取 $p\in A, q\in B$, 由 D 道路联通,则 $\exists$ 道路 $\gamma:[0,1]\to D$, s.t. $\gamma(0)=p, \gamma(1)=q$.

令 $U=\{t\in[0,1]\mid\gamma(t)\in A\}, V=\{t\in[0,1]\mid\gamma(t)\in B\}$.

故 $[0,1]=U\cup V$ 且 $U\cap V=\emptyset$.

由 $[0,1]$ 为区间,则 $U'\cap V\neq\emptyset$ 或者 $U\cap V'\neq\emptyset$.

不妨设 $U\cap V'\neq\emptyset$,令 $t_0\in U\cap V', \exists\{t_k\}\subset V$, s.t. $\lim\limits_{k\to+\infty}t_k=t_0$,由 $\gamma^k(t)$ 为连续函数,则 $A\ni\gamma(t_0)=\lim\limits_{\{k\to\infty\}}\gamma(t_k)\in B'$,此时有 $A\cap B'\neq\emptyset$, 则 D 为连通集.

□

Example 7.4.7 $B(x_0;\delta), \mathcal{S}^{n-1}(x_0;\delta)$ 都是连通的.

Theorem 7.4.8 $\mathbb{R}^n$ 中的连通开集是道路连通的.

Proof

设 D 为连通开集,设 $\forall x\in D$,构造 $A(x)=\{y\in D\mid\exists\gamma:[0,1]\to D, \text{s.t. }\gamma(0)=x, \gamma(1)=y\}$

(我们希望 $A(x)$ 是开的.) 由于 D 是开的,则

$\forall y\in A(x), \exists\delta>0$, s.t. $B(y;\delta)\subset D$,由于 $y\in A(x), \exists\gamma_1:[0,1]\to D$, .s.t $\gamma_1(0)=x, \gamma_1(1)=y$, $\exists z\in B(y,\delta), \exists z\in B(y;\delta), \exists\gamma_2:[0,1]\to B(y,\gamma)$, s.t. $\gamma_2(0)=y, \gamma_2(1)=z$

定义 $\gamma:[0,1]\to D, \gamma(t)=\begin{cases}\gamma_1(2t) & \text{if } 0\le t\le \frac{1}{2}\\ \gamma_2(2t-1) & \text{if } \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$

从而 $\gamma(t)$ 为连接,x,z 之间的道路,$z\in A(x)$,则 $A(x)$ 为开集,则 $\forall z\in D\setminus A(x)$, $A(z)$ 也是开集,且 $A(x)\cap A(z)=\emptyset$,令 $B(x)=D\setminus A(x)=\bigcup\limits_{z\in D\setminus A(x)} A(z), D=A(x)\cup B(x)$, $A(x)\cup B(x)=\emptyset$,由于 $A(x), b(x)$ 开可知 (D 连通),$\overline{A(x)}\cap B(x)=\emptyset, A(x)\cap\overline{B(x)}\neq\emptyset$,则 $B(x)=\emptyset$, i.e $D=A(x)$,从而 D 为道路连通集. □

Definition 7.4.9 $\mathbb{R}^n$ 的连通开集是(开区域),$\overline{A}$ 为闭区域.

Remark

连通集未必道路连通.

Example 7.4.10 *(topologist's sine curve)* $D=\left\{\left(x,\sin\frac{1}{x}\right)\in\mathbb{R}^2 \middle| x\in(0,1]\right\}$

证明:

1. D 是道路连通的.
2. $\overline{D}$ 为连通的.
3. $\overline{D}$ 非道路连通.

Proof

2. 设 $\overline{D}=A\cup B, A,B\neq\emptyset, A\cap B=\emptyset$ 要证明 $A'\cap B\neq\emptyset$ 或者 $A\cap B'\neq\emptyset$. 从而令 $A_1=D\cap A, B_1=D\cap B$,从而 $D=A_1\cup B_1, A_1,B_1\neq\emptyset$,由于 D 连通可以知道,$A_1'\cap B_1\neq\emptyset$ 或 $A_1\cap B_1'\neq\emptyset$,由于 $A_1\subset A, B_1\subset B$,从而 $A'\cap B\neq\emptyset$ 或 $A\cap B'\neq\emptyset$.

□

7.5 多变元函数的极限

Definition 7.5.1 设 $D\subset\mathbb{R}^n$,称映射 $f:D\to\mathbb{R}$ 为多变量函数.

$\forall x\in D, \text{s.t. } \exists y=f(x)$

- x 为 f 的自变量.
- D 为 f 的定义域.
- $f(D)$ 为 f 的值域.

Definition 7.5.2 (极限) 设 $D\subset\mathbb{R}^n, x_0\in D', A\in\mathbb{R}, f:D\to\mathbb{R}$ 多变量函数,若 $\forall A$ 的邻域, $V\subset\mathbb{R}, \exists x_0$ 的邻域 U, s.t. $f\left(\mathring{U}\cap D\right)\subset V$, 称 A 为 f 在 $x\to x_0$ 时的极限,记为 $\lim\limits_{D\ni x\to x_0} f(x)=A$.

如果使用 $\varepsilon-\delta$ 语言描述的话:

$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \text{s.t.}$ 当 $0<d(x_0,x)<\delta$ 且 $x\in D$, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Example 7.5.3 设 $f(\boldsymbol{x}) = x + 2y$,则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} = 0$

Proof

$$
\begin{aligned}
|f(x,y)| &= |x+2y| \\
&\le 2d(x,y) < \varepsilon \text{ 取 } \delta = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}} \text{ 即可.}
\end{aligned}
$$

□

Theorem 7.5.4 设 $D \subset \mathbb{R}^n, f : D \to \mathbb{R}, x_0 \in D'$,则
$\lim\limits_{x\to x_0} = A \Longleftrightarrow \forall\{x_k\} \subset D \setminus \{x_0\}, \lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0, \lim(k\to\infty)f(x_k) = A.$

Proof

"$\Longrightarrow$" $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in \mathring{B}(x;\delta) \subset D$, s.t. $|f(x) - A| < \varepsilon$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0, \exists N \in \mathbb{N}^*$ 当 $k > N$ 时,有 $x_k \in \mathring{B}(x_0;\delta) \cap D$,故 $|f(x_k) - A| < \varepsilon$.

"$\Longrightarrow$" 设 $\lim\limits_{k\to x_0} f(x) \ne A$ 或不存在,则 $\exists\varepsilon > 0, \forall k \in \mathbb{N}^*, \exists x_k \in B\left(x_0, \frac{1}{k}\right) \cap D$, s.t. $|f(x_k) - A| > \varepsilon$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$,这与假设矛盾. □

Remark

极限的性质

1. 唯一性
2. 四则运算
3. 局部有界性

Definition 7.5.5 *(复合函数的极限)*

1. 设 $f : D \subset R^n \to R, g : Y \subset R \to R$
2. $x_0 \in D', y_0 \in Y', f(D) \subset Y$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0, \lim\limits_{y\to y_0} g(x) = A$
4. $\forall y \in U_D(x_0,\delta) = B(x_0;\delta) \cap D, f(x)) \ne y_0$

则 $\lim\limits_{x\to x_0} g \circ f(x_0) = \lim\limits_{y\to y_0} g(y) = A$

equation

7.5.1 二元函数的累次极限

设 $D \subset \mathbb{R}^2, f : D \to \mathbb{R}, D = D_1 \times D_2, D_i \subset \mathbb{R}, i = 1, 2.$

设 $y \ne y_0$ 若

$$\lim_{D_1 \ni x\to x_0} f(x,y) \tag{7.5.2}$$

存在,且

$$\lim_{D_2 \ni y\to y_0} \lim_{D_1 \ni x\to x_0} f(x,y) \tag{7.5.3}$$

存在,称 Equation (7.5.2) 为 f 先 x 后 y 的累次极限.类似可定义先 y 后 x 的累次极限.

Problem

极限和累次极限的关系?

Example 7.5.1.6

1. $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x} & \text{if } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y)=(0,0)\end{cases}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0,\checkmark$. 但是 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 不存在. 极限存在,累次极限不存在.
2. 设 $f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在. 但是 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0,\checkmark$. 极限存在,累次极限不存在. 令 $y=kx$, $f(x,kx)=\dfrac{k}{1+k^2}$.
3. $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

   $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在!

   但是

   - $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=1,\checkmark$. 极限存在
   - $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=-1,\checkmark$. 极限存在

Theorem 7.5.1.7 设 $f:D\subset R^2\to\mathbb{R}$, $(x_0,y_0)\in D'$, $\lim\limits_{x,y}\to(x_0,y_0)f(x,y)=A$

1. 若 $y\neq y_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\varphi(y)$, 则 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=A$
2. 若 $x\neq x_0$, $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=\varphi(x)$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$

Proof

由 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A,\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0$, s.t. 当 $(x,y)\in\mathring{B}\left(\dfrac{x_0,y_0}{;}\delta\right)\cap D$ 有 $|f(x,y)-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$,
由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\varphi(y),\exists 0<\delta_1<\delta$, s.t. $|f(x,y)-\varphi(y)|<\dfrac{\varepsilon}{2}, 0<d(x_0,x)<\delta_1$

$$\begin{aligned}|\varphi(y)-A| &\leq \varphi|\varphi(y)-f(x,y)|+|f(x,y)-A| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

□

7.6 连续函数函数

Definition 7.6.1 设 $D\subset\mathbb{R}^n$, $f:D\to\mathbb{R}$, $x_0\in D$,若 $\forall f(x_0)$ 的邻域 V,$\exists x_0$ 的邻域 U, s.t., $f(U\cap D)\subset V$, 称 f 在 x_0 点上连续,或者 $x\to x_0, f(x)\to f(x_0)$, x_0 为 f 的连续点,否则称为间断点.

若 $\forall\in D$, $f(x)$ 连续称 f 在 D 上连续,称 $C(D)$ 为 D 上连续函数的集合.

Remark

若 $x_0 \in D \cap D'$, f 在 x_0 上连续 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Example 7.6.2

1. 常值函数为连续函数.
2. f(x) = x ^ i
3. 四则运算
4. 复合函数

Remark

$f \in C(D)$ 则 $\forall V \subset f(D)$ 开集,则存在 $\exists U \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $s.t. f^{-1}(V) = U \cap D$

Definition 7.6.3 设 $f : D \subset \mathbb{R}^n \to R,, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{s.t. } \forall x_1, x_2, \in D, d(x_1, x_2) < \delta, |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ 称 f 为 D 上一致连续函数.

Theorem 7.6.4 设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为紧集, $f \in C(D)$,则 f 为 D 上一致连续函数.